

# ZFC $\rho$ 热力学论文 V：通道归一化卷绕比与Tsallis $q$ 的动力学预测

The Channel-Normalized Winding Ratio: Dynamical Prediction of the Tsallis  $q$  Parameter in State-Coupled Oscillators

Han Qin (秦汉)

SAE Research · 2026

## 摘要

Thermo IV (DOI: 10.5281/zenodo.19605664) 建立了精确插值族  $q = 1 + 1/K$ ，并将"从动力学中独立提取  $K$  来预测 Tsallis  $q$ "列为最硬的可检验预测。本文在 Brusselator 化学振荡器上实现了这一预测的首次闭环。

核心发现：连续时间振荡器中的  $K$  不是 one-lag 有效层数  $m_{\text{eff}}(\tau)$ （后者对采样步长  $\tau$  严重敏感），而是通道归一化卷绕比（channel-normalized winding ratio）：

$$K_{\text{dyn}} = T / (n_{\text{ch}} \cdot \tau_{\text{dec}})$$

其中  $T$  是振荡周期， $\tau_{\text{dec}}$  是径向衰减时间（均从  $f$  通道自相关函数的阻尼振荡拟合中提取）， $n_{\text{ch}} = 2$  是  $f/r$  双通道数。Tsallis  $q$  由此预测为

$$q = 1 + n_{\text{ch}} \cdot \tau_{\text{dec}} / T$$

该公式不含自由参数，不依赖采样步长  $\tau$  的选择，只需要自相关函数的两个宏观时间尺度。在 Brusselator 的  $b = 2.2$ - $5.0$  参数扫描中， $|\Delta q| < 0.07$ （7 个参数点），显著优于固定  $\tau$  的  $m_{\text{eff}}$  代理方法（后者在  $b = 5.0$  处偏差达 0.215）。

$n_{\text{ch}} = 2$  的出现不是拟合结果，而是与 Thermo IV 通道平均屏蔽律  $q = \Omega_{\text{eff}}/n_{\text{ch}}$  一致，并由其自然解释： $q$  测量的是每通道的屏蔽深度，所以总卷绕比  $T/\tau_{\text{dec}}$  需要除以通道数。

本文同时报告了两个负结果：（1） $m_{\text{eff}}(\tau) \propto 1/\tau$  在连续时间系统中不是本征量；（2）Thermo IV 补充引理  $q_{\text{eff}}^{\{2\}} = 1 + \sum \lambda^2$  的 ACF 模式权重版本（ $K_{\text{part}} = 1/\sum \lambda^2$ ）在有限 BE 的 Brusselator 上不适用。这两个负结果精确缩小了 Thermo IV 开放问题 2 的范围。

## §1 问题：Thermo IV 的 $K$ 如何从动力学中提取？

### 1.1 已知与未知

Thermo IV 建立了两项精确结果：

$$e_{-q}(-x) = \left(1 + \frac{x}{K}\right)^{-K}, \quad \text{quad } q = 1 + \frac{1}{K}$$

以及通道平均屏蔽律猜想：

$$q = \frac{\Omega_{\text{eff}}}{n_{\text{ch}}}$$

精确插值族是代数恒等式。 $K$  的物理解读（有效反馈阶数）是猜想。Thermo IV 将"从自相关函数独立提取  $K$  来预测  $q$ "列为预测 P1——最硬的可检验预测[1]。

问题： $K$  在连续时间系统中如何测量？

Thermo II-III[2,3] 定义了有效层数  $m_{\text{eff}}$ ，从  $\eta \approx 1 - C(1)^{m_{\text{eff}}}$  提取。如果  $K = m_{\text{eff}}$ ，则同一个参数同时决定耗散率  $\eta$  和分布形状  $q$ 。这是 Thermo IV 的开放问题 2。

### 1.2 本文的贡献

本文有四项贡献：

- (1) 负结果： $m_{\text{eff}}(\tau)$ 在连续时间振荡器中不是本征量 (§2) 。
- (2) 负结果： $\text{Thermo IV}$ 的 $q_{\text{eff}}^{\{2\}} = 1 + \sum \lambda^2$ 在有限 $\beta E$ 系统中不适用于宏观ACF模式权重 (§3) 。
- (3) 正结果：通道归一化卷绕比 $K_{\text{dyn}} = T/(n_{\text{ch}} \cdot \tau_{\text{dec}})$ 是本文识别出的、连续时间振荡器中 $K$ 的可操作动力学对应 (§4) 。
- (4) b扫描数据： $q_{\text{pred}} = 1 + n_{\text{ch}} \cdot \tau_{\text{dec}}/T$ 在7个参数点上给出 $|\Delta q| < 0.07$ 的无 $\tau$ 预测 (§5) 。

## §2 负结果一： $m_{\text{eff}}(\tau)$ 不是本征量

### 2.1 $m_{\text{eff}}$ 对 $\tau$ 的发散

在Brusselator ( $a=1, b=3, \sigma=0.3$ ) 上，使用Thermo III的Protocol A ( $f = a+x^2y$ 合成， $r = (b+1)x$ 降解) 提取 $\eta$ 和 $C(1)$ ，然后计算 $m_{\text{eff}} = \log(1-\eta)/\log(C(1))$ 。

$\tau_{\text{steps}}$	$\tau$ (时间单位)	$\eta$	$C(1)$	$m_{\text{eff}}$
2	0.010	0.195	0.999	143
5	0.025	0.194	0.994	36
10	0.050	0.193	0.981	11.2
20	0.100	0.188	0.943	3.5
50	0.250	0.165	0.817	0.9

$\eta$ 有平台 (0.19-0.20从 $\tau=0.01$ 到0.05)，但 $m_{\text{eff}}$ 从143降到0.9，跨越两个数量级。

### 2.2 发散的数学必然性

对任何平滑连续时间过程，短时lag-1自相关满足 $C(1;\tau) \approx e^{-a\tau}$ 。于是 $\log C(1) \approx -a\tau$ ， $m_{\text{eff}} = \log(1-\eta)/(-a\tau) \propto 1/\tau$ 。

这不是数值bug，是representation effect：用不同步长切同一个物理反馈过程，步数自然不同。

### 2.3 固定 $\tau$ 的偶然精确

固定 $\tau_{\text{steps}} = 10$ 时， $m_{\text{eff}}(b=3.0) = 11.2$ ，预测 $q = 1 + 1/11.2 = 1.089$ 。测量 $q_{\text{fit}}(r^2) = 1.091$ 。偏差+0.001。

但这个精确只在 $b \approx 3.0$ 附近成立。 $b = 5.0$ 时偏差增大到0.215。原因：固定 $\tau = 0.05$ 在不同 $b$ 的系统中不是同一个动力学尺度。

### 2.4 诊断

$m_{\text{eff}}(\tau)$ 不是本征参数。它是"用 $\tau$ 作为步长时，一个固定反馈预算包含多少步"的计数。连续时间振荡器中， $K$ 不应该通过one-lag  $C(1)$ 来提取。

## §3 负结果二： $K_{\text{part}}$ 不适用于有限 $\beta E$

### 3.1 理论动机

Thermo IV §3.5证明了补充引理：在 $x \rightarrow 0$ 的二阶展开下，

$$q_{\text{eff}}^{\{2\}} = 1 + \sum_i \lambda_i^2$$

其中 $\lambda_i$ 是屏蔽层权重 ( $\sum \lambda_i = 1$ )。这暗示了一个独立的 $K$ 提取方案：

$$K_{\text{part}} = \frac{1}{\sum_i \lambda_i^2} \quad (\text{inverse participation ratio})$$

### 3.2 实验：ACF模式分解

将Brusselator (b=3.0) 的f通道自相关函数拟合为阻尼振荡+纯衰减：

$$C(\tau) = w \cdot e^{-g\tau} \cdot \cos(\omega\tau) + w \cdot e^{-g\tau}$$

结果：w = 0.477, w = 0.523 (归一化后)。Σw² = 0.477² + 0.523² = 0.501。

K\_part = 1/0.501 = 2.0。预测q = 1 + 0.501 = 1.501。

实际q\_fit = 1.091。偏差0.41。

### 3.3 失败原因

q\_eff^{(2)} = 1 + Σλ²是x→0的二阶局部展开。Brusselator的有效βE ≈ 2.5-3.5，不在小x极限。

更根本地，本实验不是对Thermo IV §3.5引理的反例，而是对错误识别λ\_i^{shield} = w\_j^{ACF}的反例。ACF的2个宏观模式（振荡+衰减）是4DD连续流形的几何渲染结果，而Thermo IV定理中的λ\_i是1DD/2DD图网络中离散屏蔽层的微观权重。11层屏蔽嵌套在宏观振荡模式的内部结构中，ACF的频谱分解无法触及。

### 3.4 对Thermo IV的影响

无影响。补充引理在数学上仍然正确。Brusselator实验只说明"宏观ACF模式权重w\_j ≠ 微观屏蔽层权重λ\_i"，尤其在非小x区域不能混用。这是一个边界条件检验，不是反例。

## §4 正结果：通道归一化卷绕比

### 4.1 从ACF中提取T和τ\_dec

将f通道自相关函数拟合为阻尼振荡+纯衰减：

$$C_f(\tau) = w_1 \cdot e^{-g_1 \tau} \cdot \cos(\omega \tau) + w_2 \cdot e^{-g_2 \tau}$$

两个宏观时间尺度直接从拟合参数中读出：

- 振荡周期T：从ACF的第一个极小值位置t\_min读出半周期 (T = 2 · t\_min)，或等价地从拟合的角频率ω读出 (T = 2π/ω)。本文的数据表使用t\_min方法。两种方法在b=3.0处的差异约15% (t\_min给T=5.76，ω给T=6.65)，反映了有限噪声下ACF振荡的非正弦性。
- 径向衰减时间 τ\_dec = 1/g：从f通道ACF的pure-decay component提取的时间常数。注意τ\_dec不是直接从相空间径向回归测得，而是从ACF的阻尼振荡拟合中的非振荡项分离出来的。

这两个量不依赖采样步长τ——它们是系统动力学的宏观参数。

### 4.2 K\_dyn的定义

定义（通道归一化卷绕比）。在状态耦合双通道振荡器中，定义动力学反馈阶数为

$$K_{\text{dyn}} = \frac{T}{n_{\text{ch}} \cdot \tau_{\text{dec}}}$$

其中n\_ch = 2是f/r双通道数。Tsallis q由此预测为

$$q_{\text{pred}} = 1 + \frac{1}{K_{\text{dyn}}} = 1 + \frac{n_{\text{ch}} \cdot \tau_{\text{dec}}}{T}$$

### 4.3 物理解读

q - 1 = n\_ch · τ\_dec/T = 径向衰减时间占每通道周期份额。

物理图像可以理解为拓扑带宽的时间分时复用：系统拥有一个宏观的本征时间资源（振荡周期T），但有n\_ch个通道需要处理涨落。由于不同通道对应的动力学算子不对易（f和r共享状态变量x），底层无法同时在多个通道上执行因果清算。因此系统必须切分时间——每通道被分配到T/n\_ch的有效因果窗口。在这个窗口内，系统抹平径向涨落的速度由τ\_dec决定。每通道在一个周期内能嵌入的有效屏蔽深度 = (T/n\_ch)/τ\_dec = K\_dyn。

q - 1测量的就是这个分配到各通道的局部深度的倒数——衰减时间占每通道时间份额的比例。

4.4 n\_ch = 2的结构理由

原始假说（子夏提出）： $m_{eff} \approx T/\tau_{dec}$ 。实验给出 $T/\tau_{dec}$ 约为所需K的两倍。用Thermo IV的双通道归一化 $n_{ch} = 2$ 后， $T/(n_{ch} \cdot \tau_{dec})$ 在 $b = 2.2-5.0$ 的扫描中给出跨参数空间更稳健的预测（§5）。

这个2不是拟合出来的。Thermo IV的通道平均屏蔽律[1]指定q测量的是"每通道的屏蔽深度"，不是总深度。所以总卷绕比 $T/\tau_{dec}$ 需要除以通道数 $n_{ch} = 2$ 。

$n_{ch} = 2$ 是Thermo IV框架中的基本结构参数（来自f/r双通道分解），不是从本次Brusselator数据拟合的。

4.5 与Thermo IV的连接

Thermo IV的精确结构 $q = 1 + 1/K$ 被完整保留。本文只改变了K的提取方式：

	Thermo IV的K	本文的K_dyn
定义	有效反馈阶数（物理猜想）	$T/(n_{ch} \cdot \tau_{dec})$ （动力学可观测）
提取方式	未指定（列为open problem）	从ACF的阻尼振荡拟合
$\tau$ 依赖性	—	无
和 $m_{eff}$ 的关系	K "可能等于" $m_{eff}$ （猜想）	$K_{dyn} \neq m_{eff}(\tau)$ （除非 $\tau$ 恰好是canonical步长）

4.6 状态标记

内容	层级
$K_{dyn} = T/(n_{ch} \cdot \tau_{dec})$	Empirical dynamical law / structurally motivated bridge
$n_{ch} = 2$ 来自Thermo IV	Strong structural evidence, not proof
T和 $\tau_{dec}$ 从ACF提取	可操作的观测协议
$q = 1 + 1/K_{dyn}$	精确（如果 $K_{dyn} = K$ ）

§5 数据：b扫描

5.1 实验设置

Brusselator SDE： $dx = (a + x^2y - (b+1)x)dt + \sigma dW_x$ ,  $dy = (bx - x^2y)dt + \sigma dW_y$ [8]。参数： $a = 1$ ,  $\sigma = 0.30$ ,  $dt = 0.005$ 。稳态采样1M步。 $r^2 = (x-x^-)^2 + (y-\bar{y})^2$ 作为canonical energy-like observable。 $q_{fit}$ 从 $r^2$ 的CCDF全局拟合Tsallis q-exponential。

方法学注记：本文的主结果以CCDF全局拟合报告。作为稳健化方向，raw-data MLE[9]和KS拟合优度检验[10]应在后续工作中实施，并以block bootstrap 95% CI报告逐点不确定性。当前的CCDF拟合在q-exponential参数估计中可能劣于MLE[9]，但已足以支撑MAE=0.022量级的主结论。

5.2 结果

b	T	$\tau_{dec}$	$K_{dyn} = T/(2\tau_{dec})$	$q_{pred}$	$q_{fit}(r^2)$	$\Delta q$
2.2	5.58	0.288	9.70	1.103	1.110	+0.007
2.5	5.62	0.280	10.02	1.100	1.089	-0.011
2.8	5.68	0.278	10.22	1.098	1.085	-0.013

b	T	$\tau_{dec}$	$K_{dyn} = T/(2\tau_{dec})$	$q_{pred}$	$q_{fit}(r^2)$	$\Delta q$
3.0	5.76	0.276	10.43	1.096	1.091	-0.005
3.5	6.07	0.263	11.54	1.087	1.103	+0.016
4.0	6.39	0.276	11.58	1.086	1.122	+0.036
5.0	6.26	0.349	8.97	1.112	1.179	+0.068

5.3 误差统计

- $MAE = (1/7) \cdot \sum |\Delta q| = 0.022$
- $RMSE = \sqrt{(1/7) \cdot \sum (\Delta q)^2} = 0.031$
- 最大 $|\Delta q| = 0.068$  ( $b = 5.0$ )
- 核心区 ( $b = 2.2-3.5$ ) : 最大 $|\Delta q| = 0.016$

5.4 与固定 $\tau$ 方法的对比

方法	b=3.0 $\Delta q$	b=5.0 $\Delta q$	$\tau$ 依赖 ?	自由参数
固定 $\tau=10$ 的m_eff	0.001	0.215	严重	1 ( $\tau$ 的选择)
T_fb方法	0.048	—	部分	0 但 $y_f$ 非常数
$K_{part} = 1/\Sigma \lambda^2$	0.410	0.373	否	0 但 $x \rightarrow 0$ 失效
$K_{dyn} = T/(n_{ch} \cdot \tau_{dec})$	0.005	0.068	否	0

$K_{dyn}$ 方法牺牲了单点 ( $b=3.0$ ) 的 $10^3$ 偶然精确，换来了跨参数空间的稳健性。这是好理论该做的事。

§6 方法论：先验指导的后验验证

6.1 三个选择的先验理由

本文的实验设计基于Thermo III-IV已发表的先验理论。三个关键选择在实验之前已由理论确定：

Observable ( $r^2$ ) : Thermo IV的§1.2区分了kernel/occupation/flux三层对象，§4证明了尾指数不是重参数化不变量。 $r^2$ 是能量类变量，对应canonical control variable  $\beta E$ 。这不是"试了多个选最好的"，而是理论预测的canonical observable。

Regime (moderate-noise  $\sigma=0.10-0.30$ ) : Thermo III[3]独立确立了Brusselator的moderate-noise absorptive regime—— $\eta \approx 0.19-0.20$ 在此窗口最稳定。 $q$ 的识别窗口与 $\eta$ 的识别窗口重合是支持性证据，不是自由度。

Estimator (全局CCDF拟合而非tail-only) : Thermo IV §4的重参数化引理证明尾指数不是一般重参数化下的不变量。选全局拟合而非尾拟合是Thermo IV的方法论推论。

6.2 后验殖民先验的警示

先验指导的选择显著降低了当前实验的研究者自由度，但并不完全消除实现层自由度。信息来源决定自由度的性质：来自已发表先验理论的选择是概念层约束（不消耗当前实验的自由度），但拟合方法（CCDF vs MLE）、拟合窗口、bootstrap block size等实现层选择仍然存在。

	纯后验拟合	本文的做法
Observable	试多个选最好的	理论预测canonical variable
参数窗口	扫多个选最漂亮的	前序论文已确立regime
拟合方法	多种方法选最接近的	引理已排除某些方法

本文的实验设计是theory-constrained compatibility test with time-stamped



§7 Claim边界与开放问题

7.1 Status map

层级	内容
Exact (来自Thermo IV)	$q = 1 + 1/K$ ，精确插值族
Empirical dynamical law	$K_{\text{dyn}} = T/(n_{\text{ch}} \cdot \tau_{\text{dec}})$ ，通道归一化卷绕比
Negative result	$m_{\text{eff}}(\tau) \propto 1/\tau$ 不是本征量； $K_{\text{part}}$ 在有限 $\beta E$ 不适用
Structural evidence	$n_{\text{ch}} = 2$ 来自Thermo IV通道平均屏蔽律
Open	第二系统验证； $n_{\text{ch}}$ 的排除性检验；MLE+bootstrap 稳健化

7.2 本文的主claim

在状态耦合双通道振荡器中，canonical energy-like observable  $r^2$ 上提取的Tsallis excess  $q-1$ 由通道归一化的径向衰减时间占比 $n_{\text{ch}} \cdot \tau_{\text{dec}}/T$ 预测。这里的 $\tau_{\text{dec}}$ 是从f通道ACF的pure-decay component提取的时间常数。

$$K_{\text{dyn}} = \frac{T}{n_{\text{ch}} \cdot \tau_{\text{dec}}}, \quad q_{\text{pred}} = 1 + \frac{n_{\text{ch}} \cdot \tau_{\text{dec}}}{T}$$

该公式在 $b = 2.2-5.0$ 的扫描中给出无 $\tau$ 选择的跨参数预测（MAE = 0.022），显著优于固定采样步长的 $m_{\text{eff}}(\tau)$ 代理。本文不claim  $K = m_{\text{eff}}(\tau)$ 为尺度自由恒等式；相反，结果表明连续时间振荡器中的 $K$ 是一个通道归一化的period-decay ratio。

7.3 超出本文scope的命题

- $K_{\text{dyn}}$ 是否适用于非振荡系统——目前仅在振荡器上验证
- $n_{\text{ch}} = 2$ 中的因子2是否真正来自f/r通道数——还是来自其他几何因子（如半周期、 $r^2$ 的频率折叠）——需要三通道系统或单通道模型的排除性检验。首选三通道验证系统：Lorenz吸引子（ $\dot{x}=\sigma(y-x), \dot{y}=x(\rho-z)-y, \dot{z}=xy-\beta z$ ，三个状态变量  $\rightarrow n_{\text{ch}}=3$ ），验证 $q = 1 + 3\tau_{\text{dec}}/T$ 。备选：Oregonator完整三变量模型。
- $q_{\text{pred}} = 1 + n_{\text{ch}} \cdot \tau_{\text{dec}}/T$ 是否精确——还是一个leading-order近似，需要更高精度的数据和/或更多系统

7.4 开放问题

1.  $K_{\text{dyn}} = T/(n_{\text{ch}} \cdot \tau_{\text{dec}})$ 的第一性原理推导——从什么物理原理推出“ $K$ 等于通道归一化卷绕比”？
2. 非振荡系统（如DP递推、Schlögl模型）中的 $K$ 提取—— $K_{\text{dyn}}$ 的定义依赖于振荡周期 $T$ ，非振荡系统怎么办？
3.  $n_{\text{ch}}$ 的排除性检验——在Lorenz系统（ $n_{\text{ch}}=3$ ）上验证 $q = 1 + 3\tau_{\text{dec}}/T$ ，或构造单通道模型验证因子2消失。
4. 高 $b$ 偏差的来源—— $b = 5.0$ 时 $|\Delta q| = 0.068$ ，是否来自强非线性下equal-sharing假设的breakdown？
5. 从 $K_{\text{dyn}}$ 到 $\Omega_{\text{eff}}$ 的反向映射——由 $q = \Omega_{\text{eff}}/n_{\text{ch}}$ 和 $q = 1 + n_{\text{ch}} \cdot \tau_{\text{dec}}/T$ ，推出 $\Omega_{\text{eff}} = n_{\text{ch}} + n_{\text{ch}}^2 \cdot \tau_{\text{dec}}/T$ 。对Brusselator（ $n_{\text{ch}}=2, T \approx 5.76, \tau_{\text{dec}} \approx 0.276$ ）， $\Omega_{\text{eff}} \approx 2.19$ ——接近Boltzmann端。这个 $\Omega_{\text{eff}}$ 有没有独立的物理解读？它和cycle-level winding budget  $T/\tau_{\text{dec}} \approx 20.9$ 之间是否存在更深层的双尺度关系？
6.  $\tau_{\text{dec}}$ 与最大负Lyapunov指数的关系—— $\tau_{\text{dec}}$ 在动力学上对应系统法向的收敛速率，即 $\tau_{\text{dec}} \propto 1/|\lambda|$ 。代入得 $q = 1 + n_{\text{ch}}/(T \cdot |\lambda|)$ ，将分布形状参数直接和轨道收敛率联系。在混沌系统（如Lorenz）上检验这一关系是远期方向。

参考文献

- [1] H. Qin, "ZFCp Thermodynamics Paper IV: Toward a First-Principles Derivation of the Tsallis  $q$  Parameter," Zenodo (2026). DOI: 10.5281/zenodo.19605664.
- [2] H. Qin, "ZFCp Thermodynamics Paper II:  $\eta \approx 0.20$  Mechanism," Zenodo (2025). DOI: 10.5281/zenodo.19511064.
- [3] H. Qin, "ZFCp Thermodynamics Paper III: Canonical f/r Extraction and Regime Classification of  $\eta$ ," Zenodo (2026). DOI: 10.5281/zenodo.19597684.
- [4] H. Qin, "ZFCp Thermodynamics Paper I:  $\eta$  Exists," Zenodo (2025). DOI: 10.5281/zenodo.19310282.
- [5] C. Tsallis, "Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics," *Journal of Statistical Physics* 52, 479–487 (1988). DOI: 10.1007/BF01016429.
- [6] G. Livadiotis and D. J. McComas, "Understanding kappa distributions: A toolbox for space science and astrophysics," *Space Science Reviews* 175, 183–214 (2013). DOI: 10.1007/s11214-013-9982-9.
- [7] C. Tsallis, *Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics: Approaching a Complex World* (Springer, New York, 2009). DOI: 10.1007/978-0-387-85359-8.
- [8] I. Prigogine and R. Lefever, "Symmetry Breaking Instabilities in Dissipative Systems. II," *Journal of Chemical Physics* 48, 1695–1700 (1968). DOI: 10.1063/1.1668896.
- [9] C. R. Shalizi, "Maximum Likelihood Estimation for  $q$ -Exponential (Tsallis) Distributions," arXiv:math/0701854 (2007).
- [10] A. Clauset, C. R. Shalizi, and M. E. J. Newman, "Power-law distributions in empirical data," *SIAM Review* 51, 661–703 (2009). DOI: 10.1137/070710111.